Problema Matemático Chino de Trigonometría (Agosto 2008)

I. López Espejo

Resolución del problema matemático chino de selectividad de trigonometría por el que la Real Sociedad Británica de Química llegó a ofrecer 730€ a todo alumno británico de nivel equivalente que lo resolviese.

I. Enunciado

El enunciado del problema se encuentra plasmado en la figura 1. Dicho enunciado dice lo siguiente:

Como se aprecia en el diagrama, en un prisma cuadrado $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=AD=2$, $DC=2\sqrt{3}$, $AA_1=\sqrt{3}$, $\overline{AD}\perp\overline{DC}$, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$, y el pie de la perpendicular es E, (i) Prueba: $\overline{BD}\perp\overline{A_1C}$; (ii) Determina el ángulo entre los dos planos A_1BD y BC_1D; (iii) Determina el ángulo formado por las líneas $\overline{AD}$ y $\overline{BC_1}$, que están en planos diferentes.

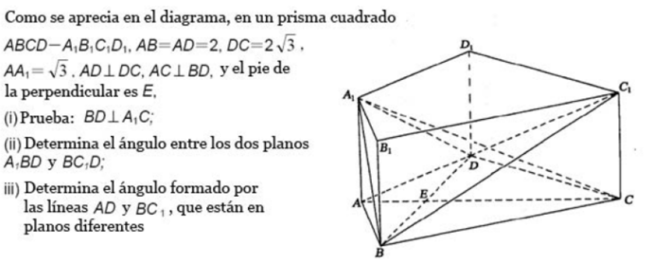

Fig. 1. Enunciado del problema.

II. Apartado Primero

En primer lugar situamos nuestro sistema de referencia coordenado con origen en $\boldsymbol{D}$, de modo que la dirección del segmento $\overline{AD}$ será considerada el eje *x*, la dirección del segmento $\overline{DD_1}$ el eje *z* y la dirección del segmento $\overline{DC}$ el eje *y*. Por ser estas tres direcciones ortogonales, según el enunciado del problema, tendremos una base ortogonal en $\mathbb{R}^3$.

Según el enunciado, $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ y, por lo tanto, su producto escalar será nulo. Dado el anterior sistema de referencia y los datos proporcionados en el enunciado es inmediato deducir las siguientes igualdades: $\overline{BD}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}=(0,0,0)-(b_1,b_2,0)=(-b_1,-b_2,0)$, $b_1,b_2\in\mathbb{R}$ y $\overline{AC}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}=\left(0,2\sqrt{3},0\right)-(2,0,0)=(-2,2\sqrt{3},0)$. Por definición, $\langle\overline{BD}|\overline{AC}\rangle=0=\left\langle(-b_1,-b_2,0)\middle|(-2,2\sqrt{3},0)\right\rangle=2b_1-2\sqrt{3}b_2$.

Ahora veremos que es innecesario conocer el valor numérico de las componentes del vector $\overline{BD}$. Según el enunciado, y gracias a nuestro sistema de referencia, sabemos que el punto $\boldsymbol{A}$ es la proyección ortogonal del punto $\boldsymbol{A_1}$ sobre el plano *XY*, por lo que la única diferencia entre la anterior exposición por definición en el enunciado y la que procedemos a demostrar, es la nueva componente del eje *z* y, por tanto, $\overline{A_1C}=\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A_1}=\left(0,2\sqrt{3},0\right)-\left(2,0,\sqrt{3}\right)=(-2,2\sqrt{3},-\sqrt{3})$. Realizamos el producto escalar $\langle\overline{BD}|\overline{A_1C}\rangle=2b_1-2\sqrt{3}b_2=\left\langle(-b_1,-b_2,0)\middle|(-2,2\sqrt{3},-\sqrt{3})\right\rangle$. Como era de esperar, el resultado es el mismo que para el anterior caso, por lo que si $\overline{AC}\perp\overline{BD}$, queda probado que $\overline{A_1C}\perp\overline{BD}$.

III. Apartado Segundo

Calculamos los vectores normales a los planos. Para el plano A_1BD tenemos: $\overline{A_1B}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A_1}=\left(3,\sqrt{3},0\right)-\left(2,0,\sqrt{3}\right)=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$ y $\overline{A_1D}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A_1}=(0,0,0)-\left(2,0,\sqrt{3}\right)=(-2,0,-\sqrt{3})$. Por tanto, $\boldsymbol{u_1}=\overline{A_1B}\times\overline{A_1D}=(-3,3\sqrt{3},2\sqrt{3})$. Hacemos lo mismo para el plano BC_1D: $\overline{BC_1}=\boldsymbol{C_1}-\boldsymbol{B}=\left(0,2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)-\left(3,\sqrt{3},0\right)=(-3,\sqrt{3},\sqrt{3})$ y $\overline{BD}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}=(0,0,0)-\left(3,\sqrt{3},0\right)=(-3,-\sqrt{3},0)$. Por tanto, $\boldsymbol{u_2}=\overline{BC_1}\times\overline{BD}=(3,-3\sqrt{3},6\sqrt{3})$.

Aplicando $\beta=\cos^{-1}\frac{\langle\boldsymbol{u_1}|\boldsymbol{u_2}\rangle}{\|\boldsymbol{u_1}\|\|\boldsymbol{u_2}\|}$ obtendremos el ángulo entre los vectores normales a los planos, idénticamente, el ángulo entre planos. Puesto que el producto escalar de los vectores normales a los planos es cero, es decir, $\langle\boldsymbol{u_1}|\boldsymbol{u_2}\rangle=0=\left\langle(-3,3\sqrt{3},2\sqrt{3})\middle|(3,-3\sqrt{3},6\sqrt{3})\right\rangle$, concluimos que son ortogonales y, por tanto, el ángulo entre ambos es de $\beta=90º$.

IV. Apartado Tercero

Es fácil demostrar que el producto escalar de dos vectores se puede expresar como el producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman de modo $\langle\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle=\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|\cos\beta$ donde, si despejamos β, llegamos a la expresión empleada en el apartado anterior. En nuestro caso intervienen los vectores $\overline{AD}$ y $\overline{BC_1}$. Sabemos que, dado nuestro sistema constante de referencia, $\overline{AD}=(2,0,0)$. Únicamente habremos de obtener el vector $\overline{BC_1}$ y aplicar la anterior definición. Es importante notar que, aunque el valor de $\boldsymbol{B}$ se calcula a continuación, es este mismo dato el que ya hubo de calcularse para el anterior apartado aunque se lleve a cabo aquí. Por tanto, $\overline{BC_1}=\boldsymbol{C_1}-\boldsymbol{B}=\left(0,2\sqrt{3},\sqrt{3}\right)-(b_1,b_2,0)=\left(-b_1,2\sqrt{3}-b_2,\sqrt{3}\right)$, $b_1,b_2\in\mathbb{R}$. Necesitamos conocer los parámetros b_1 y b_2. Para conocerlos, es suficiente con encontrar las proyecciones del punto $\boldsymbol{B}$ sobre cada uno de los ejes coordenados. Esto plantea el siguiente triángulo rectángulo, de modo que con la relación de perpendicularidad $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ y conocido $\overline{AB}$, plantearemos un sistema de ecuaciones haciendo uso del teorema de Pitágoras que nos devolverá el valor de las componentes de $\boldsymbol{B}$ aplicando finalmente la relación arriba establecida para calcular el ángulo. Planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2b_1-2\sqrt{3}b_2=0 \\ 2^2=b_2^2+(b_1-2)^2 \end{cases} \tag{1}$$

Mediante sustitución llegamos a la conclusión de que $b_1 = 3$ y $b_2 = \sqrt{3}$ (puesto que la otra pareja de soluciones será la solución trivial cero al sistema), por lo que aplicando finalmente la expresión para el cálculo del ángulo llegamos a la solución $\beta = \cos^{-1}\frac{\langle\overline{AD}|\overline{BC_1}\rangle}{\|\overline{AD}\|\|\overline{BC_1}\|} = 30º$.