Período de una Función Compuesta por Funciones Periódicas (Enero 2007)

I. López Espejo

Este texto recoge la demostración del procedimiento para el cálculo del período de una función compuesta por funciones periódicas.

I. DESARROLLO

SE DEFINE el período de una función compuesta por funciones periódicas, siempre que tenga sentido (es decir, cuando T_i/T_j es un número racional para todo $i \neq j$), como el mínimo común múltiplo de los períodos de las funciones periódicas componentes, es decir:

$$T[f(x)] = m.c.m.\{T_1, T_2, \ldots, T_N\}, \tag{1}$$

donde N es el número total de funciones periódicas que componen la función $f(x)$, siendo T_n el período de la función n-ésima.

Toda función períodica $f(x)$ verifica la igualdad $f(x) = f(x \pm nT)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde T es el período de $f(x)$. Notamos como T_1 al menor de los T_j, siendo $q_j = T_j/T_1$ con q_j perteneciente al conjunto de los números racionales y con $j = 2,3, \ldots, N$. Por tanto, $T_j = q_j T_1$ con $j = 2,3, \ldots, N$. Hacemos $m = m.c.m.\{1, q_2, q_3, \ldots, q_N\}$. Para cada j tenemos que $f_j(x + mT_1) = f_j(x + m_j T_j) = f_j(x)$, donde $m_j = m/T_j$, por lo que tendremos que f_j es (mT_1)-periódica para todo j. En consecuencia, la suma $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x)$ es (mT_1)-periódica.

II. EJEMPLO PRIMERO

La señal azul de la figura 1 es la función $\cos(5x/2)$ mientras que la señal verde es la función $3\sin(x)$. Se comprueba fácilmente que el período de la primera señal es $4\pi/5$ mientras que el período de la segunda señal se obtiene fácilmente como 2π. La señal roja es la función $\cos(5x/2) + 3\sin(x)$. Aplicando el razonamiento anteriormente expuesto obtenemos que el período de la función suma $f(x)$ es $T[f(x)] = m.c.m.\{4\pi/5, 2\pi\} = 4\pi$, como se puede comprobar gráficamente.

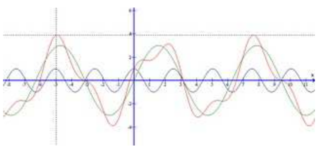

Fig. 1. Gráficas de funciones correspondientes al primer ejemplo.

III. EJEMPLO SEGUNDO

En la figura 2 la señal roja es $\tan(2x)$, la señal verde es $\sin(3x-2)$ y la señal azul es $3\sec(x)$. La señal negra está compuesta por las señales anteriores de la forma $3\sec(x)\tan(2x) - \sin(3x-2)$. Se define el período de esta última señal como $T[f(x)] = m.c.m.\{\pi/2, 2\pi/3, 2\pi\} = 2\pi$, tal y como se puede comprobar gráficamente.

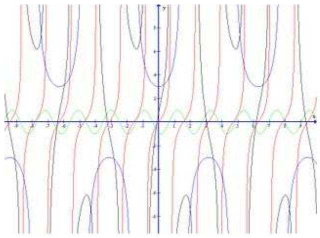

Fig. 2. Gráficas de funciones correspondientes al segundo ejemplo.